1027. 普通ノ Green 函數ガ存在シナイトキノ境界値問題

（豊田理化學研究所佐々木研究室）

佐藤常三

§1. 領域 $a \leqq x \leqq b$ ニ於ケル微分方程式

$$\Phi(y) \equiv (Py')' + Q\cdot y = 0,$$

$$\Psi(y) \equiv \Phi(y) + \lambda y = 0$$

境界條件ヲ簡單ノタメニ

$$R[y; a, b] = 0$$

トシ，コレヲ滿足スルヤウナ任意二ツノ函數 y, z ハ常ニ Green 公式ニ於ケル剩餘項

$$(1) \quad [P(yz' - y'z)]_a^b = 0$$

ナラシムルモノトス。

吾々ノ問題ハ微分方程式 $\Phi(y) = 0$ ニゾクスル Green 函數ガ作レナイ場合ニ就テ論ズル．カクノ如キ例ハ，タトヘバ

$$\begin{cases} \Phi(y) + \lambda y = 0, \\ A(y) + By'(a) = 0, \quad Cy(b) + Dy'(b) = 0 \end{cases}$$

ナル境界値問題ニ於テ，特ニ $\lambda = 0$ ニ應ズル解ガ $y \equiv 0$ 以外ニ存在スルトキナドデアル。（Lovitt, Linear Integral Equations, 頁170/176）

斯クノ如キ場合ニ對スル處理法ヲ述ベテアル參考書ノウチデ Vivanti-Schwank: Lineare Integral-

gleichungen, § 117, 頁 205/206 ヲ探ツテミルトソノ要旨ハ大体次ノ如クデアル. Hilbert ノ論旨ヲ同ジデアル.
(Hilbert ハ広義ノ Green 函数ト称シテヰル)

$$\Psi(y)=0, \quad R[y;a,b]=0$$

ノ解ヲ $\rho(x)$ トシ, 微分方程式

$$(2) \quad \Psi(y)=\rho(x)\rho(\xi)$$

ニ属スル Green 函数ヲ求メルトキ, コレガ存在スルモノト假定シテ $G(x,\xi)$ トカケバ

$$(3) \quad \int_a^b \rho^2(x)\,dx=1$$

次ニ若シモ上述ノ G ト ρ トノ間ニ

$$(4) \quad \int_a^b G(x,\xi)\rho(x)\,dx=0$$

ナル関係ガ成立スルナラバ, $G(x,\xi)$ ハ對称性ガ保証サレル.
次ニ微分方程式

$$\Psi(y)=\rho(x)\rho(\xi)$$

ニ属スル Green 函数ガ存在スルモノトシ, コレヲ $\Gamma(x,\xi)$ トカケバ (3) ニヨッテ

$$(5) \quad \int_a^b \Gamma(x,\xi)\rho(x)\,dx=0$$

トナル. (4), (5) ヲ利用スルト

$$(6) \quad G(\eta,\zeta)=\Gamma(\eta,\zeta)-\lambda\int_a^b G(\eta,x)\Gamma(x,\zeta)\,dx$$

ガ得ラレル. コレハ G ト $-\Gamma$ トノ間ニ相反性ガ成立スルコト

ヲ云フモノデアル。

何レノ著書ヲミテモ，微分方程式 $E(y) \equiv \Phi(y) + \lambda y = 0$ ニ属スル Green 函数ニツイテハ言及サレテヰナイヤウダシ，事実 Hilbert ノ原著ヲミテモ，Vivanti ノヲミテモ，該 Green 函数ト $\Gamma(x, \xi)$ トヲ混同シテヰルヤウニ思ヘル。タトヘバ Vivanti-Schwank §1. 120，頁213/216 ニ於ケル例題ニ於テハ，$G(x, \xi)$ ニヨッテ作ラレル Fredholms 行列 $D(\lambda)$ ガ

$$D(\lambda) = \sin^2\sqrt{\lambda}$$

ト計算サレテアル。$D(\lambda)$ ハ，ソノ構成定義ヨリ明カニ $D(0) = 1$ デナケレバナラナイ筈デアル。

又條件(4)ハ $G(x, \xi)$ ガ対称ナルタメノ十分條件デアル。吾々ハ此ノ点モ，モ少シ吟味スル必要ガアルヤウニ思フ。以下そこはかとなく書キツケタ拙論ニ対シテ専門家ノ御教示ヲ仰ギタイト思フ。

§2. 微分方程式

$$\Phi(y) + \lambda y = 0$$

ニ属スル Green 函数ノ存在ハ許容スルモノトシ，コレヲ $\Gamma^*(x, \xi; \lambda)$ トスレバ，Green 公式ヲ用ヒテ

$$G(\eta, \zeta) = \Gamma^*(\eta, \zeta) - \lambda \int_a^b G(\eta, x)\Gamma^*(x, \zeta)\,dx - p(\eta)H(\zeta)$$

但シ

$$H(\zeta) = \int_a^b \Gamma^*(x, \zeta)\,p(x)\,dx$$

シカルニ G 及ビ Γ^* ノ對稱性ニヨレバ

$$H(\zeta)=\text{const.}\ p(\zeta)$$

トカケル．便宜上，コレヲ $H(\zeta)=\mu^{-1}p(\zeta)$ トカイテオケバ

$$(7)\quad G(\eta,\zeta)=\Gamma^*(\eta,\zeta)-\lambda\int_a^b G(\eta,x)\Gamma^*(x,\zeta)dx-\mu^{-1}p(\eta)p(\zeta)$$

$$(8)\quad p(\zeta)=\mu\int_a^b \Gamma^*(x,\zeta)p(x)dx$$

次ニ境界値問題

$$\Phi(y)+\lambda y=0,\quad R[y;a,b]=0$$

ノ固有値及ビ固有函数ヲ λ，$\varphi(x)$ トスレバ

$$(9)\quad \varphi(\xi)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\varphi(x)dx+p(\xi)\int_a^b \varphi(x)p(x)dx$$

トナル、(9)ナル積分方程式ト上述ノ境界値問題トハ互ヒニ等値的デアルコトハ明カデアル．

以上ノ關係式カラ次ノ如キ定理ガ得ラレル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ 境界値問題

$$(10)\quad \Phi(y)+\lambda y=0,\quad R[y;a,b]=0$$

ニ於ケル固有値及ビ固有函數ハ $\lambda=0$ ヲ除ケバ，核 $G(x,\xi)$ ノ固有値及ビ固有函數ニ全ク一致スル。

證明．λ 及ビ φ ヲ核 G ノ固有値及ビ固有函數トスレバ，條件(4)ハ積分方程式論ノ示ストコロニヨッテ

$$\int_a^b \varphi(x)p(x)dx=0$$

ト変換サレル. コレヲ(9)ニ入レルト

$$\varphi(\xi)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\varphi(x)\,dx+\rho(\xi)\cdot 0;$$

即チ(9)ハ成立スルカラ, λ及ビφガ(10)ノ固有値及ビ固有函数デアル。

次ニ(10)ニ於テλ(≠0)ニ應ズル固有函数ヲφトスレバ

$$\lambda\int_a^b \varphi(x)\rho(x)\,dx=\Big[P(\varphi\rho'-\varphi'\rho)\Big]_a^b=0$$

コレヲ(9)ニ入レルナラバ

$$\varphi(\xi)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\varphi(x)\,dx$$

コレハ斯クノ如キλ及ビφガ核Gニゾクスル固有値及ビ固有函数トナルコトヲ示スモノデアル。(証明終)

特ニλ=0ニ應ズル(10)ノ解ハ$\rho(x)$デアル. 而カモ$\rho(x)$ハλ=0ニ應ズル唯一解デアルコトハ明カデアル. 何トナレバρ以外ニ$\bar{\rho}$ヲ許セバソレニヨッテ作ラレルGreen函数$\bar{G}$ハ, ソノ構成定義ヨリシレバ$\bar{G}\neq G$. 然ルニ他方(6)ハGノ代リニ$\bar{G}$ヲオイテモ成立スルカラ, 一意性ニ矛盾シテクル。

次ニ$G(x,\xi)$カラ作ラレルFredholm行列ヲ$D(\lambda)$ト記シ, 且ツ

$$g'(\lambda)/g(\lambda)=-\int_a^b \Gamma^{*}(x,x;\lambda)\,dx$$

トオクナラバ次ノ如キ結果ガ得ラレル.

$\boxed{定理 2}$ $D(\lambda)=C_0\lambda^{-1}g(\lambda)$, $C_0^{-1}=\lim_{\lambda=0}\lambda^{-1}g(\lambda)$

何トナレバ

(8) ハ $\Phi(\rho)+\mu\rho=\Phi(\rho)+(\lambda+\mu)\rho=(\lambda+\mu)\rho=0$

ト等値関係ニアル、故ニ $\mu=-\lambda$. 故ニ

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\int_a^b \Gamma(x,x;\lambda)\,dx$$

シカルニ他方 (7) ニ於テ

$$\overline{\Gamma}^*(\eta,\zeta)\equiv\Gamma^*(\eta,\zeta)-\mu^{-1}\rho(\eta)\rho(\zeta)$$

トオケバ條件 (4) ニヨッテ

$$(11)\quad G(\eta,\zeta)=\overline{\Gamma}^*(\eta,\zeta)-\lambda\int_a^b G(\eta,x)\overline{\Gamma}^*(x,\zeta)\,dx$$

トナリ, コレハ G ト $\overline{\Gamma}^*$ トノ相互関係ヲ示スモノデ (6) ト全ク同一ノ式デアル. 即チ $\overline{\Gamma}^*\equiv\Gamma$.

$$\therefore\quad \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\int_a^b \Gamma^*(x,x;\lambda)\,dx+\mu^{-1}\int_a^b \rho^2(x)\,dx$$

$$=\frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)}-\lambda^{-1}$$

トナルカラデアル。

§3. 例トシテ Vivanti-Schwank, 頁 213/216 (§120) ヲ採用シテミヨウ。

$$\begin{cases}\Phi(y)\equiv y''\\ R[y;a,b]\equiv\{y(-1)-y(1)\}^2+\{y'(-1)-y'(1)\}^2\end{cases}$$

$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ トスレバ，(3), (4) ガ満足サレル．コノトキ(2)ハ

$$y''=\frac{1}{2}$$

(10) トシテハ

$$\Phi(y)\equiv y''+\lambda y=0 \quad (\text{但シ}\ \lambda=k^2>0\ \text{ノ場合})$$

ヲ採ル．G. Γ^*, Γ ヲ計算スルト

$$\begin{cases} G(x,\xi)=\pm\dfrac{x-\xi}{2}+\dfrac{(x-\xi)^2}{4}+\dfrac{1}{6}, & (x\gtreqless\xi) \\ \Gamma^*(x,\xi)=-\dfrac{1}{2k\sin k}\cos k(x-\xi\pm 1), & (x\gtreqless\xi) \\ \Gamma(x,\xi)=\Gamma^*(x,\xi)+\dfrac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

斯クシテ $D(\lambda)$ ヲ計算スレバ

$$D(\lambda)=\lambda^{-1}\sin^2\sqrt{\lambda},\quad g(\lambda)=\sin^2\sqrt{\lambda},\quad c_0=1$$

Vivanti 及ビ Hilbert ノ計算シタ $D(\lambda)$ ハ上述ノ $g(\lambda)$ ニ外ナラナイ。

§4. 次ニ $p(x)$, 従テ $G(x,\xi)$ ノ存在ニツイテ考ヘヨウ、出発点ニ戻ッテ

$$\Phi(y)=0,\quad R[y;a,b]=0$$

ノ解トシテ $p(x)$ ノ存在ハ許シテイヽ．又(3)ノ假定モ許サレル．従ッテ (4) ヲ満足スル $p(x)$ ニツイテハマヅ考ヘネバナラナイ。

p ト $G(x,\xi)$ トノ間ニハ（G ノ對称條件ダケ除ケバ）

$$p(\xi)\int_a^b G(x,\eta)\,p(x)\,dx-p(\eta)\int_a^b G(x,\xi)\,p(x)\,dx$$

$$= -G(\eta, \zeta) + G(\zeta, \eta)$$

ナル関係ガ成立シテキル、ソコデ G ガ対称ナルタメノ條件ニツイテ考ヘヨウ．(4)ガ十分條件デアルコトハ明ラカデアル．ソコデ必要條件ヲサガシテミヨウ．$G(\eta,\zeta)=G(\zeta,\eta)$ ナラバ

上記ノ関係式カラ

$$(12) \quad \rho(\eta) = \nu \int_a^b G(x, \eta)\rho(x)dx \qquad (\nu = \text{const.})$$

ナル如キ const ν ガ存在セネバナラナイ．$\nu = 0$ トスレバ $\rho \equiv 0$ トナルカラ，$\nu \neq 0$．(12)ガ成立スレバ，タシカニ G ハ對称トナル。

(5)ハ(4)ヲ用ヒナイデ成立スル．(6)ハ

$$-\lambda \int_a^b G(x, \eta)\Gamma(x, \zeta)dx + \nu^{-1}\rho(\eta)\rho(\zeta)$$

$$= -\Gamma(\eta, \zeta) + G(\zeta, \eta)$$

トナル．今

$$(13) \quad G^*(\eta, \zeta) \equiv G(\eta, \zeta) - \nu^{-1}\rho(\eta)\rho(\zeta)$$

トオケバ上ノ関係式ハ

$$(14) \quad -\lambda \int_a^b G^*(\eta, x)\Gamma(x, \zeta)dx = -\Gamma(\eta, \zeta) + G^*(\eta, \zeta)$$

トナッテ Γ ガ G^* ノ相反核トナル。

且ツ明ラカニ $G^*(x, \xi)$ ハ

$$\text{主}(G^*) = \rho(\xi)\rho(x)$$

及ビ

$$\int_a^b G^*(x,\xi)\,\rho(x)\,dx = 0$$

トナルカラ，§2ニ於ケルGノ代リニ G^* ヲ以テ置キ換ヘルコトが出来ル．即チ λ=0 ヲ除イテ

$$\Phi(y)+\lambda y=0,\quad R[y;a,b]=0$$

ノ固有値及ビ固有函数ハ G^* ノソレラト全ク相一致スルニ到ル。

茲ニ注意スベキハ G^* ハタシカニ (1) ヲ満足スルモ境界條件

$$R[y;a,b]=0$$

ヲ満足スルモノトハ，断定出来ナイ．併シ満足スルトキモ有リ得ル．タトヘバ homogeneous デ linear ノトキナドデアル。斯クノ如キトキハ green 函数が結局確定シ得ナイトキデアル．仍テ次ノ如ク云フコトが出来ル．

$\Phi(y)-\rho(\xi)\rho(x)$ ニゾクスル green 函数が與ヘラレタ境界條件ノ下ニ唯一的ニ決定サレルタメニハ $r^{-1}=0$ 即チ (4) ヲ成立セシメネバナラナイ。但シ茲ニ境界條件ハ任意 α,β ニ対シテ

$$R[\alpha y+\beta z;a,b]=0,\quad R[y;a,b]=0,$$
$$R[z;a,b]=0$$

ナル如キ性質ヲ有スルモノトス。 〔未完〕